Universidad Simón Bolívar
Dpto. de Cómputo Cient. y Estadística
CO3321 / Estadística / mtmf

Máxima Verosimilitud.

1. El control de recepción de una partida de rodillos se realiza clasificando las piezas en pequeñas, normales y grandes. Las proporciones teóricas se suponen $p_1 = 0.05 + \theta$, $p_2 = 0.90 - 2\theta$, $p_3 = 0.05 + \theta$. Se analizan 5000 piezas obteniendo $n_1 = 278$; $n_2 = 4.428$; $n_3 = 294$ de cada clase. Se pide la estimación maximoverosímil de θ.

2. En una fábrica de ciertos elementos, la producción puede tener cuatro tipos de defectos A,B,C,D. Cada elemento puede tener cualquier combinación de los defectos pero cada uno puede aparecer solo una vez. También se sabe lo siguiente:

   1) $P(A) = P(B) = P_1$
   2) $P(C) = P(D) = P_2$

   (a) Calcule la distribución de probabilidad del número de defectos de un cierto elemento.
   (b) Para estimar P_1 y P_2 se toma una muestra de 100 elementos, 4 tenían el defecto A, 5 tenían el defecto B, 11 tenían el defecto C y 13 tenían el defecto D. Encuentre el E.M.V. de P_1 y P_2.

3. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria que corresponde, en cada caso, a una de las siguientes densidades:

   (a) Poisson:

   $$f_\theta(x) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \qquad x = 0, 1, \ldots; \qquad \theta > 0$$

   (b) Exponencial:

   $$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \qquad si \quad x > 0; \qquad \theta > 0$$

   (c) Doble Exponencial:

   $$f_\theta(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}, \qquad x \in \Re; \qquad \theta \in \Re$$

(d) Rayleigh:

$$f_\theta(x) = x\frac{e^{-x^2/2\theta}}{\theta}; \qquad x > 0; \qquad \theta > 0$$

(e)

$$f_\theta(x) = 2\theta^{-2}(\theta - x); \qquad 0 < x \leq \theta$$

En cada caso encuentre el estimador de máxima verosimilitud de θ.

4. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria de la distribución gamma con parámetros α y β:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}; \qquad x > 0; \qquad \alpha, \beta > 0$$

Calcule las ecuaciones que definen los estimadores de máxima verosimilitud para α y β. ¿ Pueden resolverse de manera explícita?. ¿Cómo hallaría Ud. estos estimadores?.

5. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria de una distribución con densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2} e^{-(x-\theta_1)/\theta_2} & \text{si } x \geq \theta_1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\theta_1 \in \Re$, $\theta_2 > 0$. Hallar los estimadores de máxima verosimilitud de θ_1 y θ_2.

6. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra aleatoria de una población cuya distribución es Gamma con $\alpha = 2$. Demostrar que el estimador de máxima verosimilitud para θ está dado por:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$