Universidad Simón Bolívar
Departamento de Cómputo
Científico y Estadística
CO5312 Ene - Mar, 2011

Nombre: ______________________

Carnet: ______________________

Profesor: ______________________

Problemario 2 (25 %)

Fecha de Entrega: En la clase del Martes 22 de Febrero.

1. Una persona está interesada en aprender sobre los hábitos de sueño de los estudiantes de una universidad. Esa persona ha escuchado que los doctores recomiendan 8 horas de sueño para un adulto promedio. Sea θ la proporción de estudiantes que duerme al menos 8 horas. El objetivo del análisis es hacer inferencia sobre θ. En una muestra de 30 estudiantes, 14 respondieron que habían dormido 8 horas la noche anterior. Supongamos que se tiene *éxito* cuando la persona duerme al menos 8 horas; y *fracaso* cuando no es así. θ puede ser considerada como la probabilidad de *éxito*.

   a) Escriba la verosimilitud de los datos

   b) Sea $p(\theta)$ la distribución a priori para θ. Construya una distribución a priori considerando que es una distribución discreta definida de la siguiente manera: A los posibles valores de $\theta = (0{,}10, 0{,}20, 0{,}30, 0{,}40, 0{,}50, 0{,}60, 0{,}70, 0{,}80, 0{,}90)$ se le asignan pesos $2, 3, 4, 4, 8, 8, 2, 2, 1$.

   c) Defina una distribución a priori Beta con hiperparámetros conocidos α y β, definidos de tal forma que la media de θ es igual a 0,42 y la varianza igual a 0,004. (Sugerencia: Use el método de momentos para estimar α y β).

   d) Para las dos distribuciones a priori propuestas anteriormente, calcule la distribución a posteriori utilizando la regla de Bayes.

   e) Para ambos casos grafique, a modo de comparación, la distribución a priori y la distribución a posteriori. (Sugerencia: Coloque la distribución a priori y la distribución a posteriori en un mismo panel)

2. Pruebe que para una obervación y con distribución Normal $y \sim N(\theta, \sigma^2)$, donde θ es desconocida y σ^2 es conocida, si se asume una distribución a priori $\theta \sim N(\mu_o, \tau_o^2)$ con hiperparámetros μ_o y τ_o^2 conocidos, la distribución a posteriori es $\theta | y \sim N(\mu_1, \tau_1^2)$ donde $\mu_1 = \frac{\frac{1}{\tau_o^2}\mu_o + \frac{1}{\sigma^2}y}{\frac{1}{\tau_o^2} + \frac{1}{\sigma^2}}$ y $\frac{1}{\tau_1^2} = \frac{1}{\tau_o^2} + \frac{1}{\sigma^2}$

3. Supongamos ahora que tenemos $y = (y_1, \ldots, y_n)$ n observaciones donde $y_i \sim N(\theta, \sigma^2)$, con $\theta = 0$ conocida y σ^2 desconocida. Asumiendo una distribución a priori $\sigma^2 \sim Inv{-}\chi^2(\nu_o, \sigma_o^2)$ con grados de libertad ν_o y factor de escalamiento σ_o^2 (hiperparámetros) conocidos, demuestre que la distribución a posteriori para σ^2 es

$$\sigma^2 | y \sim Inv - \chi^2(\nu_o + n, \frac{\nu_o \sigma_o^2 + nv}{\nu_o + n})$$

donde $v = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2$.

4. En el problema anterior demuestre que si la distribución a priori para σ^2 es $p(\sigma^2) \propto 1/\sigma^2$, la distribución a posteriori es una $Inv-\chi^2(n, v)$. Demuestre también que este resultado puede obtenerse asumiendo los grados de libertad a priori $\nu_0 = 0$ en el problema anterior.

5. Muestre que si $y|\theta$ tiene una distribución exponencial con tasa θ, entonces la distribución gamma a priori es conjugada para la inferencia sobre θ dada un muestra *iid* de valores independientes e idénticamente distribuidos.