Selección del Nivel de Significación

- El lema de Neyman-Pearson describe un procedimiento para el cual dado un nivel de significación α_0, $\beta(\delta)$ es mínimo para un procedimiento δ con $\alpha(\delta) \leq \alpha_0$.
- Valores tradicionales de α_0 son: 0.10, 0.05, 0.01. Valor más común: $\alpha_0 = 0{,}05$.
  - Si las consecuencias del error tipo I son poco importantes $\alpha_0 = 0{,}10$.
  - Si las consecuencias son serias: $\alpha_0 = 0{,}01$
- Se escoge $\alpha_0 = 0{,}01$ cuando el experimentador quiere ser conservador, es decir, no rechaza H_0 a menos que los datos muestrales proporcionen fuerte evidencia para ello.
- Sin embargo, si n es grande, seleccionar $\alpha_0 = 0{,}01$ puede conducir a un procedimiento de contraste que rechazará H_0 para ciertas muestras que proporcionan evidencias de que H_0 es cierta.

Ejemplo

Supongamos que tenemos datos de una distribución normal con media θ desconocida y varianza 1 con:

- $H_0 : \theta = 0$

- $H_1 : \theta = 1$

Entre todos los procedimientos de contraste para los cuales $\alpha(\delta) \leq 0{,}01$, el valor $\beta(\delta)$ será mínimo para el procedimiento δ^* que rechaza H_0 cuando $\bar{x}_n > k'$ donde k' se elige de forma que:

$$Pr(\bar{x}_n > k' | \theta = 0) = 0{,}01$$

. Si $\theta = 0$ $\bar{x}_n \sim N(0, 1/n)$. Por lo tanto de la tabla normal $k' = 2{,}326 n^{-1/2}$.

Este procedimiento es equivalente a rechazar H_0 cuando $f_1(\mathbf{x})/f_0(\mathbf{x}) > k$, donde $k = exp(2{,}326 n^{-1/2} - 0{,}5n)$.

En este caso la probabilidad de un **error tipo I** será $\alpha(\delta^*) = 0{,}01$.

Error tipo II: Probabilidad de aceptar H_0 cuando H_1 es cierta.

$\Rightarrow \beta(\delta^*) = Pr(\bar{x}_n < 2{,}326 n^{-1/2} | \theta = 1)$.

Si $\theta = 1$

$$\bar{x}_n \sim N(1, 1/n) \Rightarrow$$

$$z' = n^{1/2}(\bar{x}_n - 1) \sim N(0,1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \beta(\delta^*) &= Pr(n^{1/2}(\bar{x}_n - 1) < (2{,}326 n^{-1/2} - 1) n^{1/2}) \\ &= Pr(z' < 2{,}326 - n^{1/2}) \\ &= \Phi(2{,}326 - n^{1/2}) \end{aligned}$$

Dependencia de $\alpha(\delta^*)$ y $\beta(\delta^*)$ del tamaño muestral.

n	$\alpha(\delta^*)$	$\beta(\delta^*)$	k
1	0.01	0.91	6.21
25	0.01	0.0038	0.42
100	0.01	8×10^{-15}	$2{,}5 \times 10^{-12}$

- Si $n = 1$ H_0 se rechazará si $f_1(\mathbf{x})/f_0(\mathbf{x}) > k = 6{,}21$. Esto implica que H_0 no se rechazará a menos que los valores observados $x_1, \ldots, x_n$ de la muestra sean 6.21 veces más probables con H_1 que con H_0.
- Si $n = 100$ $\beta(\delta^*)$ es extremadamente pequeño en relación con $\alpha(\delta^*) = \alpha_0$. Por lo tanto δ^* es mas conservador con respecto a un error tipo 2 que con respecto a un error tipo 1.
- Un valor de α_0 que es apropiado para un valor pequeño de n, puede ser muy grande para un valor grande de n.

Supongamos que el experimentador considera que el error tipo I es mas serio que el error tipo II y desea utilizar un procedimiento de contraste tal que $100\alpha(\delta) + \beta(\delta)$ sea mínimo.

Por teorema 1, se podría rechazar H_0, si y sólo si, el cociente de verosimilitudes $f_1(\mathbf{x})/f_0(\mathbf{x}) > 100$ independientemente del tamaño muestral. Entonces el procedimiento que minimiza $100\alpha(\delta) + \beta(\delta)$ no rechazará H_0 a menos que los valores observados $x_1, \ldots, x_n$ sean 100 veces más probables con H_1 que con H_0.

Parece razonable minimizar una combinación lineal de la forma $a\alpha(\delta) + b\beta(\delta)$ en lugar de fijar un valor de $\alpha(\delta)$ y minimizar $\beta(\delta)$. Desde un punto de vista Bayesiano es natural utilizar esta alternativa.

Procedimiento de contraste de Bayes

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución cuya f.d.p. ó f.p. es $f(\mathbf{x}|\theta)$.

Se desean contrastar als hipótesis simples:

- $H_0 : \theta = \theta_0$

- $H_1 : \theta = \theta_1$

Sea:

- d_0= Decisión de aceptar H_0

- d_1= Decisión de aceptar H_1

Sea w_0: Pérdida cuando se elije d_1 y H_0 es correcta

Sea w_1 = Pérdida cuando se elije d_0 y H_1 es correcta.

Sea $L(\theta_i, d_j)$ = Función de pérdida cuando θ_i es el verdadero valor y se elige d_j, $j = 0, 1$.

$L(\theta_i, d_j)$	d_0	d_1
θ_0	0	w_0
θ_1	w_1	0

Sea ξ_0 = Probabilidad inicial de que H_0 sea cierta

Sea ξ_1 = Probabilidad inicial de que H_0 sea cierta = 1- ξ_0.

Pérdida esperada de cualquier procedimiento de contraste δ

$$r(\delta) = \xi_0 E(P'erdida|\theta = \theta_0) + \xi_1 E(P'erdida|\theta = \theta_1)$$

$$E(P'erdida|\theta = \theta_0) = w_0 \alpha(\delta)$$

$$E(P'erdida|\theta = \theta_1) = w_1 \beta(\delta)$$

$$\Rightarrow r(\delta) = \xi_0 w_0 \alpha(\delta) + \xi_1 w_1 \beta(\delta)$$

Un procedimiento que minimiza esta pérdida esperada $r(\delta)$ se denomina procedimiento de contraste de Bayes.

Por teorema anterior un procedimiento de contraste de Bayes aceptará H_0 si

$$\xi_0 w_0 f_0(\mathbf{x}) > \xi_1 w_1 f_1(\mathbf{x})$$

y aceptará H_1 si

$$\xi_0 w_0 f_0(\mathbf{x}) < \xi_1 w_1 f_1(\mathbf{x})$$

Cualquiera de las dos hipótesis puede ser aceptada si:

$$\xi_0 w_0 f_0(\mathbf{x}) = \xi_1 w_1 f_1(\mathbf{x})$$